8^a Série de Problemas
Termodinâmica e Estrutura da Matéria
MEBM, MEFT e LMAC

1. Considere um sistema de N =3 partículas distinguíveis que se podem distribuir por três estados i = 1,2,3.

1.a.i) Qual é número total de microestados acessíveis ao sistema.

1.a.ii) Indique qual(ais) é(são) o(s) estado(s) que corresponde(m) ao máximo e ao mínimo de entropia.

2. Imagine-se um sistema de N=4 partículas, que está isolado. Os níveis de energia que podem ser ocupados pelas partículas são os níveis com energia:-1, 0, 1, 2, etc. Se a energia interna do sistema for U=3, calcule o número de microestados no caso:

2.a) Clássico (Maxwell-Boltzmann)

2.b) Quântico (Bose-Einstein)

2.c) Quântico (Fermi-Dirac)

3. Considere um sistema de $N = 6\text{x}10^{23}$ partículas distinguíveis, as quais se podem distribuir em três estados i = 1,2,3.

3.a) Suponha que o sistema se encontra isolado.

3.a.i) Escreva a expressão do número total de microestados acessíveis ao sistema.

3.a.ii) Escreva a expressão geral da entropia do sistema, quando este se encontra num macroestado genérico com

- N_1 partículas no estado i=1
- N_2 partículas no estado i=2
- N_3 partículas no estado i=3

3.a.iii) Apresente a(s) configuração(ões) microscópica(s) do sistema que corresponde(m) ao seu mínimo de entropia. Calcule esse valor mínimo.

3.a.iv) Apresente a(s) configuração(ões) microscópica(s) do sistema que corresponde(m) ao seu máximo de entropia. Calcule esse valor máximo.

3.b) Suponha que os três estados do sistema correspondem de facto a três níveis de energia, tais que $u_1 = 0$, $u_2 = \varepsilon$ e $u_3 = 2\varepsilon$, com $\varepsilon = 10^{-20}$ J. Nessas condições, admita que o sistema é posto em contacto com uma fonte de calor à temperatura T, evoluindo para um macroestado de equilíbrio correspondente a uma distribuição de Maxwell-Boltzmann.

3.b.i) Calcule a ocupação média de cada nível de energia e a energia interna do sistema,nos seguintes limites:

- Baixas temperaturas, $T \rightarrow 0$.
- Altas temperaturas, $T \rightarrow \infty$.

3.b.ii) Esboce o gráfico de Ni (i=1,2,3) em função de T.

4. Calcule a razão entre o número de microestados acessíveis às moléculas de água após e antes da fusão dum cubo de gelo com 100 g, a 0°C, para uma temperatura ambiente T_{amb} = 30°C.

5. Considere um sistema com 5 níveis de energia, $E_n=n\,E_1$, (n=0,1,…,4 e E_1=0.01 eV=1.6×10^{-21} J) em equilíbrio com uma fonte de calor à temperatura T=205 K.

5.a) Escreva a função de partição do sistema.
Nota: utilize a expressão da soma da série geométrica para simplificar resultado, $\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}$

5.b) Calcule as probabilidades $P_0,\ldots,P_4$, de encontrar uma partícula num dos estados 0,..., 4.

5.c) Calcule a energia média de uma partícula do sistema.

Analise agora o problema como um problema de contagem de estados. Assim, suponha que tem 4 partículas distinguíveis (A, B, C, e D), distribuídas pelo 5 estados, sabendo que a energia total do sistema é de 0.04 eV.

5.d) Determine as configurações possíveis do sistema, e de quantas formas consegue realizar cada uma das configurações.

5.e) Determine a probabilidade de ter uma das partículas, por exemplo a partícula A, no estado n=2. Compare com o de P_2 obtido na alínea b). Comente o resultado.

6. Suponha que tem um sistema de N partículas, cada uma das quais pode ocupar um de dois estados, 1 e 2, com energias $E_1=-\varepsilon$ e $E_2=\varepsilon$, com $\varepsilon>0$.

6.a) Escreva a função de partição do sistema em função da temperatura.

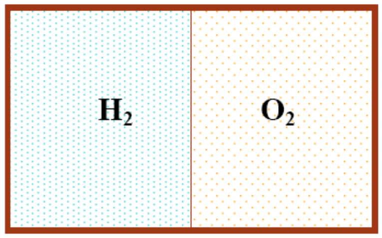
6.b) Determine as populações relativas de partículas em cada um dos níveis de energia, $p_i=N_i/N$, onde N_i é o número de partículas no nível *i*. Obtenha o limite de baixas temperaturas e comente.

6.c) Escreva a expressão da energia total do sistema em função da temperatura.

6.d) Sabendo que a energia total do sistema é U, mostre que $1/T=(k/2\varepsilon)\ln[(N-U/\varepsilon)/(N+U/\varepsilon)]$. Verifique que a temperatura absoluta é negativa se U>0 (!).[1]

[1] Temperaturas absolutas negativas não são impossíveis nem paradoxais: a terminologia é mais peculiar que a física! Temperaturas absolutas negativas podem ocorrer quando há um nível máximo de energia ao qual um sistema pode aceder e, apesar da designação, correspondem a sistemas mais quentes que qualquer sistema com temperaturas positivas. Norman F. Ramsey, prémio Nobel da Física em 1989, explicou a termodinâmica destes sistemas num artigo de 1956 (Phys. Rev. 103, 20 (1956)).

7. O recipiente da figura tem uma separação amovível entre duas partes com $0.5m^3$ cada. Do lado esquerdo contém H_2 à temperatura de 0ºC e à pressão atmosférica. Do lado direito, O_2 à mesma pressão e à mesma temperatura.



7.a) Quando se retira a partição e os gases se misturam, a entropia aumenta ou diminui? (responda sem fazer contas).

7.b) Calcule a variação de entropia quando os gases se misturam completamente.

7.c) Este processo é reversível?

8. Um sistema é constituído por dois *spins* A e B. Cada *spin* só pode ter dois estados (s_i=+1 ou s_i=-1) podendo tomar qualquer deles ao longo da evolução dos sistema.

8.a) Calcule o número de microestados do sistema.

8.b) Sabendo que a energia associada a cada microestado é $E = -Js_1s_2 - H(s_1 + s_2)$ com *J* e *H* constantes, calcule a probabilidade de cada microestado quando o sistema está em contacto térmico com um reservatório à temperatura *T*.

9. Determine a partir da função de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann a expressão para a velocidade mais provável de uma espécie.

10. Mostre como poderia determinar que a energia média associada a um grau de liberdade de vibração é k_BT a partir do factor de Boltzmann.

11.

11.a) Calcule o número de moléculas de ar que existem em 1 cm^3, em condições normais de pressão e temperatura.

11.b) Calcule a energia cinética média e a velocidade quadrática média das moléculas do ar nessas condições, v_{qm}.

Considere o ar como um gás homogéneo de massa molecular 29 u.m.a.

11.c) Calcule a probabilidade de uma molécula ter velocidade superior à velocidade quadrática média, $P(v > v_{qm})$. Use a tabela da distribuição de Maxwell-Boltzmann.

11.d) Quantas moléculas em 1 cm^3 de ar têm velocidade superior à velocidade quadrática média?

12. O número de moléculas na alta atmosfera que atingem velocidades superiores à velocidade de escape do campo gravítico terrestre determina a abundância dos vários gases que compõem a atmosfera. A 500 km de altitude, a velocidade de escape é 11 km/s e a temperatura é de cerca de 600 K. Calcule:

12.a) A energia cinética média das moléculas de H_2 e O_2 a essa temperatura. É igual ou diferente para os vários gases que a compõem?

12.b) A velocidade quadrática média para as moléculas de hidrogénio e para as moléculas de oxigénio.

12.c) A velocidade média e a velocidade mais provável nos dois casos.

12.d) Usando a tabela da distribuição de Maxwell-Boltzmann calcule a probalidade de se ter $v > v_{escape}$ nos dois casos. Que pode concluir sobre a abundância dos dois gases na atmosfera?

13. Titã é uma das luas de Saturno e a velocidade de escape à sua superfície é semelhante à da Lua. No entanto, o Titã tem uma atmosfera de metano (CH_4) e amoníaco (NH_3), e a Lua, como se sabe, não tem atmosfera. Sabendo que a velocidade de escape da Lua na face virada para o Sol é 2,4 km/s e a de Titã é 2,6 km/s e ainda que a temperatura à superfície da Lua na face virada para o Sol é 100ºC e a temperatura de Titã na face virada para o Sol é -153ºC, explique porque é que a Lua não pode ter uma atmosfera semelhante. Justifique com cálculos: determine, por exemplo, a probabilidade de se ter $v(CH_4) > v_{escape}$ num e noutro caso.

Nota: De facto, a atmosfera de Titã é muito semelhante em composição à atmosfera primordial da Terra, basicamente constituída por metano e amoníaco, tendo evoluído para a composição actual, devido ao aparecimento da vida.

14. O *51 Pegasi b* foi o primeiro planeta extra-solar descoberto orbitando uma estrela semelhante ao Sol, a *51 Pegasi*. Pertence à classe de “Júpiter

Quentes”, por ter uma massa semelhante à de Júpiter ($0.468 \times 1.9 \times 10^{27}$ kg), um raio cerca de 1.2 a 1.4 o raio de Júpiter, mas uma temperatura de cerca de 1300 K devido à sua proximidade à estrela-mãe (0.05 UA).[2]

14.a) Determine a energia cinética média dos gases atmosféricos de *51 Pegasi b*.

14.b) Admitindo a presença de Hélio na atmosfera determine a velocidade média desta espécie. A massa molar do hélio é de 4 g/mole.

14.c) Calcule a probabilidade do Hélio escapar à atmosfera de *51 Pegasi.* Admita que a velocidade de escape é de cerca de 36 km/s.

15. A energia de ionização do hélio é $E_{ionização}$= 22 eV. Discuta se espera que no interior do Sol, onde a temperatura é de cerca de 2×10^7 °C, o hélio esteja ou não ionizado ?
$m_{He}=4$ *u.m.a. ; 1 eV=1,6 x* 10^{-19}*J.*

16. O modelo de atmosfera isotérmica admite que, dentro das variações de altitude consideradas, o ar se comporta como um gás perfeito em equilíbrio térmico à temperatura *T*, sob a acção de um campo gravítico de aceleração constante *g*.

16.a) Escreva a expressão da energia de cada partícula (de massa *m*) do ar.

16.b) Obtenha a expressão da densidade do ar em função da altitude *z*.

17. Numa centrifugadora de eixo vertical girando com velocidade angular ω está uma solução aquosa à temperatura T com partículas de massa m. As partículas, devido à rotação, ficam sujeitas à força centrífuga $F_c = m\omega^2 r$, sendo r a distância ao eixo de rotação. Notando que esta força pode ser considerada como derivada de uma energia potencial $U = -(1/2)m\omega^2 r^2$:

17.a) Obtenha a expressão para a dependência da densidade d da partícula na distância r.

17.b) Se a centrifugadora efectuar 100 rotações por minuto, sendo $m = 10^{-16}$ kg e T = 300 K, qual a razão das densidades correspondentes a r_1 = 3mm e r_2 = 1mm?

17.c) A variação da densidade com r será mais ou menos acentuada se aumentar T? E se aumentar ω? Justifique.

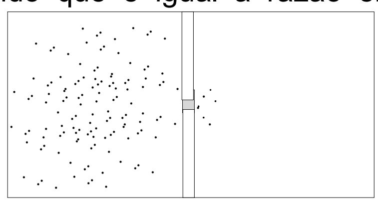
---

[2] A distância orbital entre 51 Pegasi b e sua estrela-mãe equivale a menos da metade da distância média entre Mercúrio e o Sol e apresenta um período orbital de 4.23 dias. Apesar de inicialmente se ter suposto que poderia ser um planeta rochoso, hoje em dia acha-se que um valor tão elevado da massa é unicamente compatível com um gigante gasoso tipo Júpiter. Mas enquanto Júpiter orbita o Sol a uma distância de 5.2 UA, os planetas “Júpiter Quentes” orbitam as suas estrelas a uma distância de 0.015 UA a 0.5 UA e caracterizam-se por terem elevadas temperaturas.

18. Nos reactores nucleares utiliza-se como combustível urânio enriquecido no isótopo ^{235}U (relativamente a ^{238}U). Um dos processos de enriquecimento é realizado através da difusão preferencial das moléculas de UF_6 através de membranas. A massa molar do Fluor é 19 g/mole. Recorde que a massa molar dos isótopos ^{235}U e ^{238}U é de 235 e 238 g/mole, respectivamente

18.a) Determine a velocidade quadrática média de cada uma das moléculas de UF_6 formadas com cada um dos isótopos de Urânio em estado gasoso num recipiente a T=500 K.

18.b) Determine a razão entre as taxas de difusão dos dois isótopos através do filtro, sabendo que é igual à razão entre as respectivas



velocidades quadráticas médias. Se a temperatura do recipiente se reduzisse a metade, a razão entre as taxas de difusão era alterada? Admitindo que o compartimento da direita estava inicialmente vazio, e as concentrações iniciais dos dois isótopos iguais, em que compartimento se encontra uma maior concentração relativa de ^{235}U após o instante inicial?

18.c) Caso o sistema de enriquecimento seja constituído por 10 estágios de filtragem semelhantes aos descrito, que enriquecimento máximo, em percentagem, espera poder obter no fim do processo?